Integrali

Alessandro Fallica
Liceo Ginnasio Statale "G. Verga" – Adrano

3 aprile 2014

Indice

1 Differenziale di una funzione

1.1 Definizione di differenziale

Sia data la funzione $y = f(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$. Diremo differenziale della funzione data in un suo punto di ascissa x_0 il prodotto della derivata della funzione, calcolata in x_0, per l'incremento della variabile. Cioè:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{1}$$

la lettera d seguita dalla variabile dipendente(dy) o dalla funzione (df) è assunta a simbolo di differenziazione. La relazione (1) è valida quando è verificata la condizione:

$$x_0 \quad \text{e} \quad x_0 + \Delta x \in [a, b]$$

Esempio 1.1 *Data la funzione $y = x^2 - 1$, calcolare il differenziale nel suo punto di ascissa 2.*

$$dy = 4\Delta x$$

Dicesi differenziale generico o, più semplicemente differenziale di una funzione in un suo punto generico la seguente relazione:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \tag{2}$$

con la condizione $x \quad \text{e} \quad x + \Delta x \in [a, b]$

Esempio 1.2 *Calcolare il differenziale generico della funzione $y = x^2 - 1$.*

$$dy = 2x\Delta x$$

Applicando la definizione di differenziale alla funzione $y = x$ abbiamo:

$$df = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

cioè il differenziale della variabile è uguale all'incremento della variabile stessa. In base a ciò la (2) può scriversi sotto la forma

$$dy = f'(x)dx$$

Che ci permette di poter affermare che:

Definizione 1.3 *il differenziale della funzione è anche uguale al prodotto della derivata della funzione per il differenziale della variabile indipendente.*

Esempio 1.4 *Scrivere l'espressione del differenziale della funzione $y = \operatorname{sen} 3x$.*

$$dy = 3\cos 3x dx$$

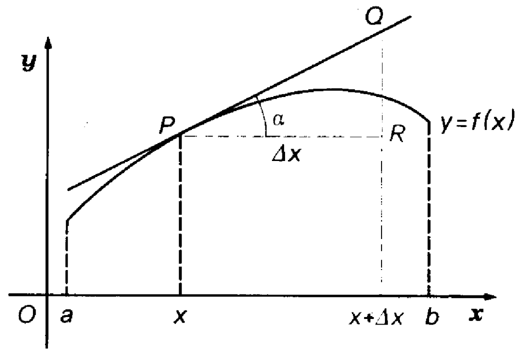

Figura 1: *Significato geometrico del differenziale*

1.2 Significato geometrico del differenziale di una funzione

Disegniamo il grafico della funzione $y = f(x)$ (vedi figura 1), derivabile nell'intervallo $[a, b]$ e consideriamo il punto generico P di coordinate $[x, f(x)]$ con $x \in [a, b]$. Costruiamo la tangente alla curva nel punto P. Consideriamo il punto Q, della tangente, di ascissa $x + \Delta x$ interno all'intervallo di definizione della funzione e applichiamo al triangolo rettangolo QPR un noto teorema di trigonometria. Avremo:

$$\overline{RQ} = \overline{PR} \tan \alpha \tag{3}$$

Si ha che: $\overline{PR} = \Delta x$ per costruzione e $\tan \alpha = f'(x)$ per il significato geometrico della derivata. la (3) diventa:

$$\overline{RQ} = f'(x) \cdot \Delta x$$

Confrontando quest'ultima con la (2) avremo:

$$\overline{RQ} = dy$$

cioè: *il differenziale della funzione in un suo punto rappresenta l'incremento di ordinata calcolata sulla tangente.*

1.3 Differenziali di ordine superiore

I differenziali successivi al primo si definiscono come le derivate successive. Così, si chiama *differenziale del secondo ordine* il differenziale del differenziale del primo ordine. Si rappresenta con il simbolo $d^2 f(x)$ o $d^2 y$. Ricordando che dx deve essere considerato come una costante si ha:

$$d^2 f(x) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = [f''(x)dx]dx = f''(x)dx^2$$

cioè:

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2.$$

Analogamente si definisce, in generale, il differenziale di ordine n, che si indica con $d^n f(x)$, e si ha:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n \tag{4}$$

cioè: *il differenziale di ordine* n *di una funzione è il prodotto della derivata* n^{ma} *per la potenza* n^{ma} *del differenziale della variabile indipendente.* Dalla (4) si ricava:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

cioè: *la derivata* n^{ma} *di una funzione è il rapporto fra il differenziale* n^{mo} *della funzione e la potenza* n^{ma} *del differenziale della variabile indipendente.*

2 Integrali indefiniti

2.1 Definizione di integrale indefinito

L'integrale indefinito di una funzione data (che chiameremo funzione integranda) è una funzione (funzione primitiva) nota a meno di una costante ed avente per derivata la funzione integranda.
Indichiamo con il simbolo $\int$ (S deformata) l'operazione di integrale indefinito. Diremo che è:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{5}$$

soltanto se è verificata la condizione:

$$D\left[F(x) + C\right] = F'(x) = f(x)$$

Esempio

$$\int (\cos x - \operatorname{sen} 2x)dx = \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x) + C$$

in quanto

$$\begin{aligned} D[\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x) + C] &= \cos x(1 - \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cos x = \\ &= \cos x - \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x = \\ &= \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

La precedente definizione ci permette di sottolineare che l'integrazione indefinita è l'operazione inversa della differenziazione o della derivazione. Infatti è:

$$\int d[F(x) + C] = \int f(x)dx = F(x) + C$$

2.2 Proprietà dell'integrale indefinito

A) *L'integrale della somma algebrica di due o più funzioni integrabili è uguale alla somma algebrica degli integrali di ciascuna funzione*

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm \ldots]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \ldots$$

B) *L'integrale del prodotto di una costante per una funzione è uguale alla costante per l'integrale della funzione*

$$\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$$

2.3 Integrali immediati

1.
$$\int dx = x + C$$

2.
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

3.
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad (n = -1)$$

4.
$$\int e^x dx = e^x + C$$

5.
$$\int a^x dx = a^x \log_a e + C$$

6.
$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

7.
$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

8.
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

9.
$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot x + C$$

10.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$$

11.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Tutta la teoria degli integrali indefiniti si basa su una definizione, due proprietà e undici integrali immediati.

Ogni qual volta ci troveremo di fronte al calcolo di un integrale indefinito dovremo trasformare la funzione integranda in modo da ricondurre l'integrale proposto ad un integrale immediato.

2.4 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Sia

$$y = \frac{N(x)}{D(x)} \tag{6}$$

una funzione razionale fratta con $N(x)$ un polinomio di grado m e $D(x)$ un polinomio di grado n, con $m \geq n$.
In tal caso si può eseguire la divisione tra il polinomio $N(x)$ e il polinomio $D(x)$, ottenendo come quoziente il polinomio $Q(x)$ di grado $m - n$ e come resto il polinomio $R(x)$ di grado inferiore ad n.
La funzione (6) può scriversi, allora, nella forma:

$$y = \frac{Q(x)D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Pertanto se si deve calcolare $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$ basterà calcolare

$$\int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx \tag{7}$$

La funzione $Q(x)$ è un polinomio e pertanto è facilmente integrabile. Occorrerà calcolare, però, $\int \frac{R(x)}{D(x)}dx$.

Esempio:

$$\int \frac{4x^4 + 8x^2 + x + 3}{2x^2 + 1}dx$$

eseguendo la divisione si ha: $Q(x) = 2x^2 + 3$, $R(x) = x$. Applicando la (7)

$$\begin{aligned}
&\int (2x^2 + 3)dx + \int \frac{x}{2x^2 + 1}dx = \\
&\qquad = 2\int x^2dx + 3\int dx + \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2 + 1}dx = \\
&\qquad\qquad = 2\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{1}{4}\log(2x^2 + 1) + C
\end{aligned}$$

Consideriamo ora:

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}dx$$

con $R(x)$ polinomio di grado inferiore a quello di $D(x)$. Da quanto esposto precedentemente e in particolare dalla (7) possiamo dedurre che sapremo integrare una funzione razionale fratta se sapremo ricondurre a forme facilmente integrabili la funzione $R(x)/D(x)$. Consideriamo il caso frequente in cui $D(x)$ è un polinomio di secondo grado. $R(x)$, pertanto, potrà essere o di primo grado o di grado nullo (cioè una costante) Ci proponiamo, dunque, di calcolare gli integrali del tipo:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx \tag{8}$$

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}dx \tag{9}$$

Consideriamo i tre possibili casi: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

1° caso $\Delta > 0$. Il trinomio ax^2+bx+c è decomponibile in fattori. Infatti, dette x_1 e x_2 le sue radici, si avrà:

$$ax^2+bx+c = (x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

la funzione integranda di entrambi gli integrali (8) e (9) si può decomporre nella somma di due frazioni elementari:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

che sappiamo integrare, poichè A e B sono delle costanti, da determinare tramite il principio di identità dei polinomi.

2° caso $\Delta = 0$. In questo caso le radici x_1 e x_2 del trinomio al denominatore della funzione integranda sono coincidenti. Si ha, perciò:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

Per l'integrale (9) si procederà così:

$$\begin{aligned}\int \frac{q}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}dx = \frac{q}{a}\int (x-x_1)^{-2}dx \\ &= \frac{q}{a}\frac{(x-x_1)^{-2+1}}{-2+1}+C = -\frac{q}{a(x-x_1)}+C\end{aligned}$$

L'integrale (8) si calcolerà, invece, decomponendo la funzione integranda in una somma del tipo:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{px+q}{a(x-x_1)^2} = \frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{a(x-x_1)^2}$$

con A e B due costanti da determinare con il principio d'identità dei polinomi.

3° caso $\Delta < 0$. Se il discriminante è negativo, il trinomio non è decomponibile nel campo reale. É possibile dimostrare la seguente formula:

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}+C$$

2.5 Integrazione per sostituzione

In molti casi la risoluzione di un integrale è resa complessa dalla presenza di funzioni composte. É utile, allora, introdurre una variabile ausiliaria per poter applicare in maniera più semplice modelli di risoluzione conosciuti.

Teorema 2.1 (Teorema di sostituzione) *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo D e sia $x = g(t)$ una funzione biunivoca definita in un intervallo A a valori su D e dotata di derivata continua e non nulla in A. Allora:*

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]dg(t) \quad con \quad t = g^{-1}(x)$$

Ricordiamo che $x = g(t)$ e $t = g^{-1}(x)$ sono funzioni inverse e quindi la loro composizione fornisce la funzione identica.
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ sappiamo che:

$$\int f[g(t)]dg(t) = F[g(t)] + C$$

per cui:

$$\int f[g(t)]dg(t) = F[g(g^{-1}(x))] + C = F(x) + C = \int f(x)dx$$

Esempio 2.2 *Calcolare i seguenti integrali indefiniti con il metodo di sostituzione.*

$$\int \sqrt{x+4}dx$$

Poniamo $x + 4 = t$, da cui $x = t - 4$ e $dx = dt$. Si ha:

$$\int \sqrt{x+4}dx = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

risostituendo si ottiene:

$$\int \sqrt{x+4}dx = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\int \text{sen }(4x-1)\, dx$$

Se poniamo $4x - 1 = t$, da cui:

$$x = \frac{1}{4} \cdot (t+1)$$

e quindi

$$dx = \frac{1}{4}dt$$

$$\int \text{sen }(4x-1)dx = \int \text{sen}\, t \cdot \frac{1}{4}dt = \; = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos(4x-1) + C$$

2.6 Integrazione per parti

Il metodo di integrazione per parti si basa sul seguente teorema:

Teorema 2.3 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni definite in un intervallo $[a,b]$ e ivi continue e derivabili, allora:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

il termine $f(x)$ è detto **fattore finito***, mentre $g'(x)dx$ è detto* **fattore differenziale***.*

Differenziando il prodotto delle due funzioni si ha:

$$d[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

da cui:

$$f(x)g'(x)dx = d[f(x)g(x)] - f'(x)g(x)dx$$

Integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

che è la tesi.
Il teorema può anche essere espresso in un modo più compatto:

$$\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df \tag{10}$$

Tale formulazione prende il nome di regola di integrazione per parti e può essere letta nel seguente modo:

Definizione 2.4 *l'integrale del prodotto di un fattore finito f per un fattore differenziale dg è uguale al prodotto del fattore finito per l'integrale del fattore differenziale diminuito dell'integrale del prodotto tra l'integrale del fattore differenziale e il differenziale del fattore finito.*

Impostiamo l'applicazione della regola di integrazione per parti secondo il seguente schema:

1. scegliere il fattore finito f;
2. calcolare df;
3. scegliere il fattore differenziale dg;
4. calcolare $\int dg$;
5. applicare la formula di integrazione per parti.

Esempio 2.5 *Calcolare* $\int x \sec^2 x dx$.

Procediamo come segue:

1. fattore finito: $f = x$
2. $df = dx$
3. fattore differenziale: $dg = \sec^2 x dx$
4. $g = \int \sec^2 x dx = \tan x$

Applicando la formula (10) si ha:

$$\int x \sec^2 x dx = x \cdot \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

2.7 Calcolo dell'integrale definito

Vediamo ora come procedere per calcolare un integrale indefinito:

1. Come prima cosa devi vedere se l'integrale e' immediato, cioe' se e' compreso nella tabella degli integrali o e' riconducibile ad essi.
2. Se l'integrale non e' immediato devi vedere se si puo' risolvere mediante sostituzione: in genere e' risolvibile per sostituzione se l'argomento dell'integrale contiene contemporaneamente una funzione e la sua derivata.
3. Se l'integrale non e' per sostituzione dovrai provare l'integrazione per parti: potrai fare l'integrale per parti se l'argomento dell'integrale si puo' spezzare in due funzioni, una di cui conosci l'integrale e l'altra di cui conosci la derivata.
4. Se ancora non hai risolto l'integrale osserva se e' una funzione razionale ed in tal caso usa il metodo per le funzioni razionali.
5. Se poi non e' una funzione razionale prova a sviluppare la funzione in serie di potenze e fai l'integrale di ogni termine della serie.

3 Integrali definiti

3.1 Area di un rettangoloide

Definizione 3.1 *Data una funzione* $y = f(x)$ *continua nell'intervallo* $[a, b]$ *con* $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, *si chiama rettangoloide o trapezoide o regione piana l'insieme:*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \leq x \leq b \quad e \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

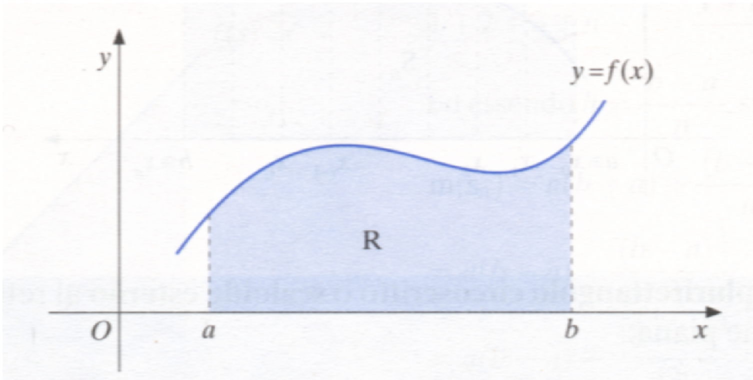

Figura 2: *Rettangoloide*

Con il termine *rettangoloide* si intende, pertanto, un dominio piano r individuato da una curva di equazione $y = f(x)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$ (figura 2). Per definire l'area di R dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli, tutti di uguale lunghezza

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Ponendo $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x, \ldots,$ $x_i = a+i\Delta x$, $x_n = b$, l'intervallo $[a, b]$ può essere considerato come l'unione degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ privi di punti interni comuni.
L'insieme degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ prende il nome di **suddivisione** o **partizione n-esima** di $[a, b]$ e viene indicato con σ_n.
in ciascun intervallo chiuso $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione è definita continua e quindi, per il teorema di Weierstrass, è dotata sia di minimo che di massimo, che indicheremo rispettivamente con m_i ed M_i.
Consideriamo ora la figura a contorno rettilineo costituita dall'unione degli n rettangoli aventi come base gli n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ e come altezza i rispettivi valori m_i. (figura 3)

Definizione 3.2 *Si chiama* **plurirettangolo inscritto** *o* **scaloide interno** *al rettangoloide R la regione piana:*

$$s_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad e \quad 0 \leq y \leq m_i\}.$$

Dalla definizione segue che $s_n \subseteq R$. Nella figura 3 è riportato un esempio di plurirettangolo inscritto.

Definizione 3.3 *Consideriamo ora la figura a contorno rettilineo costituita dall'unione degli n rettangoli aventi come base gli n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ e*

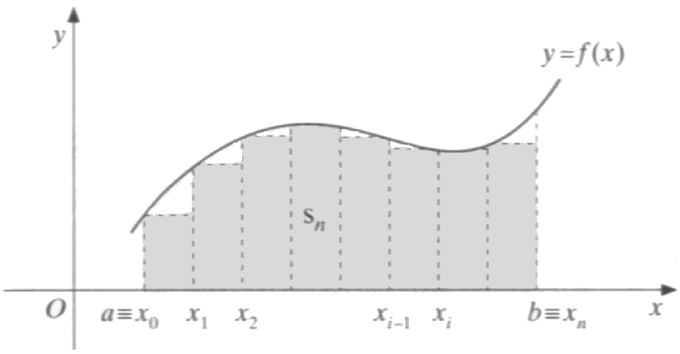

Figura 3: *Plurirettangolo inscritto*

come altezza i rispettivi valori M_i. (figura 4) Si chiama **plurirettangolo circoscritto** *o* **scaloide esterno** *al rettangoloide R la regione piana:*

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad e \quad 0 \leq y \leq M_i\}.$$

Dalla definizione discende che $S_n \supseteq R$. Nella figura 4 è riportato un esempio di plurirettangolo circoscritto. A ogni partizione σ_n dell'intervallo $[a, b]$ corrisponde un valore di $m(s_n)$ e uno di $m(S_n)$; essi forniscono due valori approssimati, rispettivamente per difetto e per eccesso della misura del rettangoloide R. L'approssimazione dell'area di R è tanto migliore quanto più fine è la partizione σ.
consideriamo ora le due successioni numeriche:

$$I = \{m(s_1),\, m(s_2), \ldots,\, m(s_n)\}$$
$$C = \{m(s_1),\, m(s_2), \ldots,\, m(s_n)\}$$

La prima è una successione di numeri reali crescente, la seconda è una successione di numeri reali decrescente. La prima successione è dotata di estremo superiore e la seconda di estremo inferiore; infatti si ha sempre:

$$m(s_n) \leq m(R) \leq m(S_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

passando al limite si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} m(s_n) \leq \lim_{n\to\infty} m(R) \leq \lim_{n\to\infty} m(S_n)$$

e di conseguenza

$$m(R) = \lim_{n\to\infty} m(s_n) = \lim_{n\to\infty} m(S_n)$$

siamo così in grado di dare la definizione di misura di un rettangoloide.

Definizione 3.4 *Dato un rettangoloide R delimitato dalla curva continua di equazione $y = f(x)$ (con $f(x) > 0$), dall'asse delle ascisse e dalle rette parallele all'asse delle ordinate di equazione $x = a$ e $x = b$, si chiama* **misura** *o* **area** *del rettangoloide il numero reale non negativo che è il limite comune delle due successioni delle misure delle aree degli scaloidi interni ed esterni al rettangoloide.*

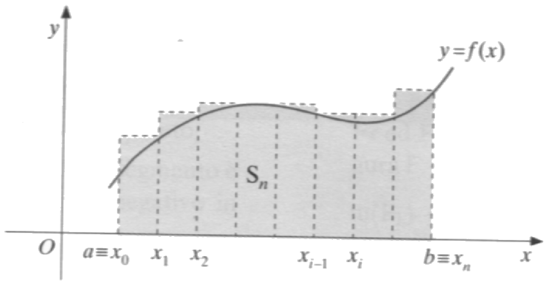

Figura 4: *Plurirettangolo circoscritto*

3.2 Integrale definito di una funzione continua

Definizione 3.5 (Integrale di Cauchy.) *Si dice integrale definito della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, b]$ il limite comune delle due successioni degli scaloidi interni ed esterni. In simboli:*

$$m(R) = \lim_{n\to\infty} m(s_n) = \lim_{n\to\infty} m(S_n) = \int_a^b f(x)dx$$

La definizione di integrale definito che abbiamo introdotto richiede che la partizione dell'intervallo $[a, b]$ sia fatta con intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ di ampiezza costante e che per ogni intervallo parziale si ricerchino il massimo ed il minimo. Queste considerazioni restrittive non sono necessarie, è infatti possibile dare una definizione più generale di integrale, ossia la definizione di **integrale definito secondo Riemann**, prendendo in considerazione intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ di ampiezza non costante e considerando un qualunque valore di $f(c_i)$ che la funzione $f(x)$ può assumere in quell'intervallo. Premettiamo alcune definizioni.

Definizione 3.6 (Suddivisione.) *Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato della retta reale. Si chiama suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un insieme di punti:*

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n\}$$

tali che:

$$a = x_0, < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

si chiama ampiezza massima o diametro della suddivisione il numero reale δ che è la massima misura della lunghezza degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$

Definizione 3.7 (Somma integrale di Riemann.) *Sia $f(x)$ una funzione definita continua in $[a, b]$; sia σ una sua suddivisione di diametro δ; scegliamo in ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto c_i. Si chiama somma integrale di Riemann la somma:*

$$S_\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Definizione 3.8 (Integrale definito secondo Riemann) *Data un funzione $f(x)$ definita e continua in un intervallo $[a, b]$ consideriamo le somme integrali:*

$$S_\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

si chiama integrale definito secondo Riemann il numero $l \in \mathbb{R}$ tale che:

$$l = \lim_{\delta \to 0} S_\delta(f) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

3.3 Proprietà degli integrali definiti

A) *Invertendo gli estremi di integrazione, l'integrale cambia segno*, cioé:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{11}$$

B) *La somma di due o più integrali aventi la stessa funzione integranda e tali che l'estremo superiore di uno di essi sia uguale all'estremo inferiore del successivo è uguale ad un unico integrale avente la stessa funzione integranda ed eseguito tra il minore degli estremi inferiori ed il maggiori degli estremi superiori d'integrazione.* Cioé:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx = \int_a^d f(x)dx \tag{12}$$

C) *La somma algebrica di due o più integrali aventi gli stessi estremi d'integrazione è un unico integrale eseguito tra gli stessi estremi ed avente, per funzione integranda, la somma algebrica delle funzioni integrande.* Cioé:

$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx \tag{13}$$

3.4 Teorema della media

Definizione 3.9 *sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$. Chiamiamo* **media integrale** *o* **valor medio** *di $f(x)$ in $[a,b]$ il numero:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 3.10 (Teorema della media) *Data la funzione $f(x)$, continua nell'intervallo $[a,b]$ esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale risulta:*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora si avrà:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

basterà osservare che la funzione $F(x)$ soddisfa il teorema di Lagrange cioé:

$$F(b) - F(a) = (b-a)\cdot f(c)$$

ossia la tesi.

3.5 La funzione integrale

Consideriamo una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato e sia x un qualsiasi punto dell'intervallo considerato.

Definizione 3.11 *Si chiama* **funzione integrale** *della funzione $f(x)$ in $[a,b]$ la funzione così definita:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{14}$$

che associa ad ogni $x \in [a,b]$ il valore numerico $\int_a^x f(t)dt$.

La variabile indipendente per la funzione $F(x)$ è l'estremo superiore x dell'integrale definito dato dalla (14), è detta *variabile di integrazione:* ad essa si può sostituire una qualsiasi altra variabile; per esempio:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(z)dz = \dots$$

3.6 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il legame esistente tra una funzione e la funzione integrale ad essa associata è espresso dal seguente teorema.

Teorema 3.12 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Se la funzione $f(x)$ è continua in $[a,b]$, la corrispondente funzione integrale $F(x)$ è derivabile e, $\forall x \in [a,b]$, risulta*

$$F'(x) = f(x)$$

Consideriamo $x \in [a,b]$ e diamo ad x un incremento Δx in modo che sia $(x+\Delta x) \in [a,b]$. Nel passaggio da x a $x+\Delta x$ la funzione integrale subisce l'incremento

$$\Delta F = \int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

Applicando all'ultimo integrale scritto il teorema della media si ha:

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = \Delta x \cdot f(c)$$

dove c è un conveniente punto dell'intervallo $[x, x+\Delta x]$. Il rapporto incrementale della funzione F, relativo al punto x e all'incremento Δx, è pertanto:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot f(c)}{\Delta x} = f(c) \tag{15}$$

Tenedo presente che x è fissato ed è $x \leq c \leq x + \Delta x$, si ha che:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow c \to x$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ nella (15), e ricordando che f è continua, si ha dunque

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

l'esistenza del limite del rapporto incrementale dimostra che $F(x)$ è derivabile e precisamente risulta:

$$F'(x) = f(x)$$

4 Complementi

4.1 Lunghezza di una curva piana

Sia $y = f(x)$ una funzione continua e derivabile in $[a, b]$ ci poniamo il problema di calcolare la misura dell'arco Γ avente come estremi i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. Supponiamo che tale misura esista. fissata una partizione σ di $[a, b]$ di diametro δ tramite i punti successivi $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, un valore approssimato della misura di Γ è dato dalla lunghezza della poligonale ρ di vertici $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, B$, ossia:

$$m_\sigma(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Al variare della partizione σ di $[a, b]$, varia la poligonale ρ e quindi $m_\sigma(\rho)$. Date due partizioni σ_1 e σ_2, con σ_1 più fine di σ_2, si ha:

$$m_{\sigma_1}(\rho) \geq m_{\sigma_2}(\rho).$$

Definizione 4.1 *Detto L l'insieme dei valori $m_\sigma(\rho)$, definiamo lunghezza della curva Γ l'estremo superiore, se esiste, di tale insieme e lo indichiamo con $m(\Gamma)$.*

La lunghezza della curva Γ, se esiste, è data dal seguente teorema.

Teorema 4.2 *La misura della lunghezza di un arco Γ di curva, grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a, b]$, è dato da:*

$$m(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Esempio 4.3 *Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = x^2$ nell'intervallo $[-1, 2]$.*

Poichè $f'(x) = 2x$ si ha:

$$m(\Gamma) = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

4.2 Volume di solidi di rotazione

Sia $y = f(x)$ l'equazione di una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e supponiamo che sia

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$$

Consideriamo ora il rettangoloide T delimitato dal grafico della funzione , dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$ e facciamo ruotare

di un giro completo attorno all'asse x tale rettangoloide. Si otterrà un solido di rotazione α di cui vogliamo determinare la misura V del volume (vedi fig. 5).
Procediamo in modo analogo a quanto fatto nel §3.1: dividiamo, pertanto, l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, di ampiezza

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

mediante i punti $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x, \ldots$, $x_i = a+i\Delta x$, $x_n = b$. Diciamo, come al solito, m_i ed M_i rispetivamente i valori minimo e massimo che la funzione assume nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

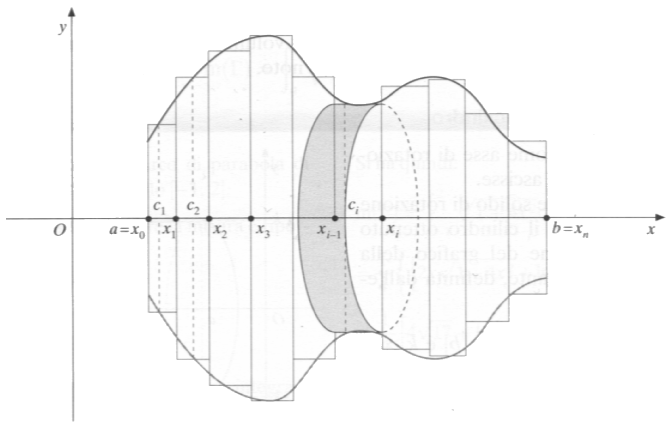

Figura 5: *Pluricilindro*

Consideriamo ora il plurirettangolo inscritto ed il plurirettangolo circoscritto al rettangoloide T: questi plurirettangoli, nella rotazione di un giro completo attorno all'asse delle x, danno luogo a due solidi che chiameremo rispettivamente *pluricilindro inscritto* e *pluricilindro circoscritto* al solido α. Ricordando che la misura del volume di un cilindro di raggio r e altezza h è $\pi r^2 h$, indicando con v_n e V_n le misure dei volumi del pluricilindro inscritto e circoscritto, si ha:

$$v_n = \pi m_1^2 \Delta x + \pi m_2^2 \Delta x + \ldots + \pi m_n^2 \Delta x \qquad (16)$$

$$V_n = \pi M_1^2 \Delta x + \pi M_2^2 \Delta x + \ldots + \pi M_n^2 \Delta x \qquad (17)$$

Ricordando anche quanto visto al §3.1, possiamo dire che la (16) è la *somma integrale inferiore* della funzione di equazione

$$y = \pi[f(x)]^2$$

relativa alla suddivisione di $[a, b]$ effettuata. Analogamente, sempre per la stessa funzione, la (17) è la *somma integrale superiore.*

Al variare di $n \in \mathbb{N}_0$ si ottengono le successioni

$$v_1,\, v_2, \ldots\, v_n, \ldots$$
$$V_1,\, V_2, \ldots\, V_n, \ldots$$

cioè le successioni delle somme integrali inferiori e superiori della funzione $y = \pi[f(x)]^2$. Per quanto visto possiamo concludere che:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Ovvero in conclusione:

Teorema 4.4 *Data una funzione di equazione $y = f(x)$ definita, generalmente continua e non negativa nell'intervallo $[a, b]$, il volume V del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il grafico di $f(x)$ attorno all'asse delle ascisse è dato da:*

$$m(V) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Esempio 4.5 *Calcolare la misura V del volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle x della parte di piano individuata dalla parabola di equazione*

$$y^2 = x$$

e dalla retta $x = 1$.

Osserviamo che il volume richiesto si può ottenere con una rotazione attorno all'asse delle x della parte di piano individuata in $[0, 1]$ dal grafico della funzione di equazione

$$y = \sqrt{x}$$

Pertanto:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Riferimenti bibliografici

[1] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi *"Nuovi elementi di matematica"* tomo B e C ed. Ghisetti e Corvi

[2] R. Ferrauto, M. Campitelli *"La nuova analisi infinitesimale"* Società Editrice Dante Alighieri

[3] R. Bruno, W. Cavalieri, P. Lattanzio *"Calcolo integrale"* ed. Arnoldo Mondadori Scuola